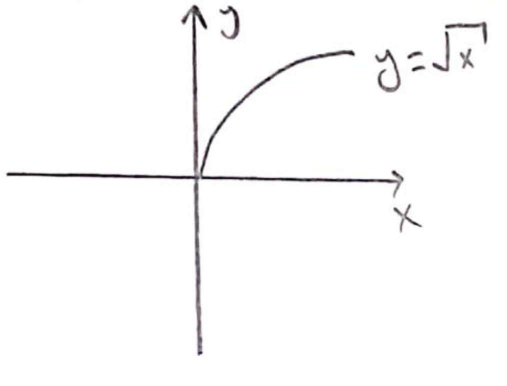
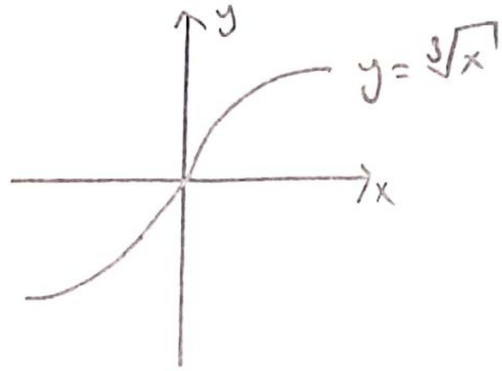
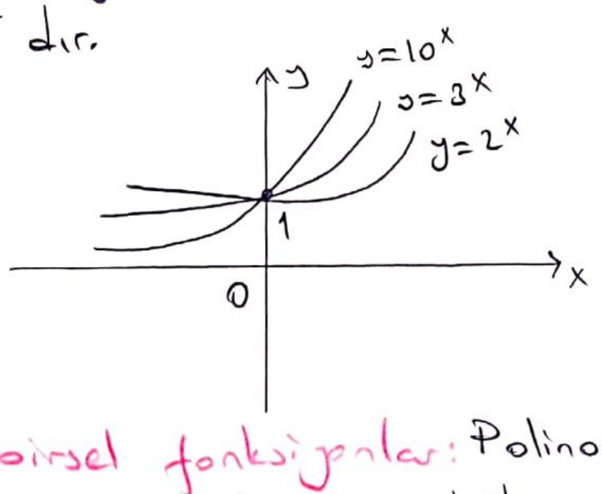


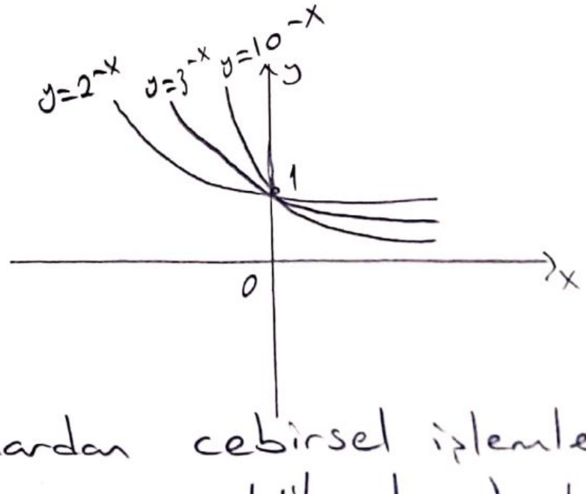


Polinomlar: $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ sabit reel sayılar olmak üzere $p(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ şeklinde tanımlı p fonksiyonuna polinom denir. $n \neq 0$ ise n ye polinomun derecesi denir. Polinomlar $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır.

Rasyonel fonksiyonlar: p ve q polinom olmak üzere $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ fonksiyonuna rasyonel fonksiyon denir. Bir rasyonel fonksiyon $q(x)\neq 0$ olan tüm x reel sayıları için tanımlıdır.

Üstel fonksiyonlar: $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ olmak üzere $f(x)=a^x$ şeklindeki fonksiyona üstel fonksiyon denir. Tüm üstel fonksiyonların tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $\mathbb{R}^+$ dır.





Cebirsel fonksiyonlar: Polinomlardan cebirsel işlemler ile (toplama, çıkarma, bölme, çarpma ve kök alma) elde edilen fonksiyonlara cebirsel fonksiyon denir.

Transandantal fonksiyonlar: Cebirsel olmayan fonksiyonlara denir. Trigonometrik, ters trigonometrik, logaritmik fonksiyonlar bu tip fonksiyonlara örnektir.

Tam deger fonksiyonu: $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonuna tam deger fonksiyonu denir.

Örnek: $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonunun grafigini cizelim.

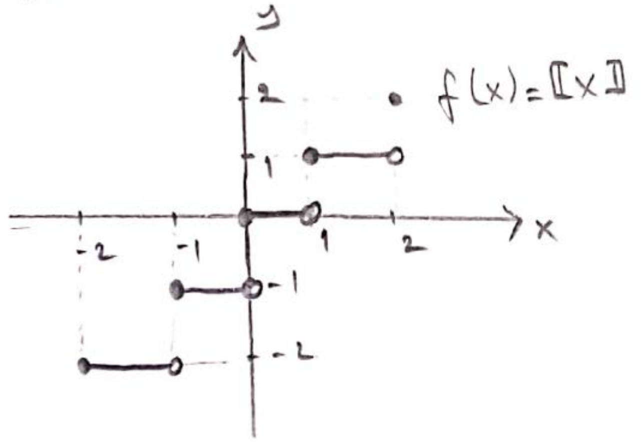
$-2 \leq x < -1$ icin $f(x) = -2$

$-1 \leq x < 0$ icin $f(x) = -1$

$0 \leq x < 1$ icin $f(x) = 0$

$1 \leq x < 2$ icin $f(x) = 1$

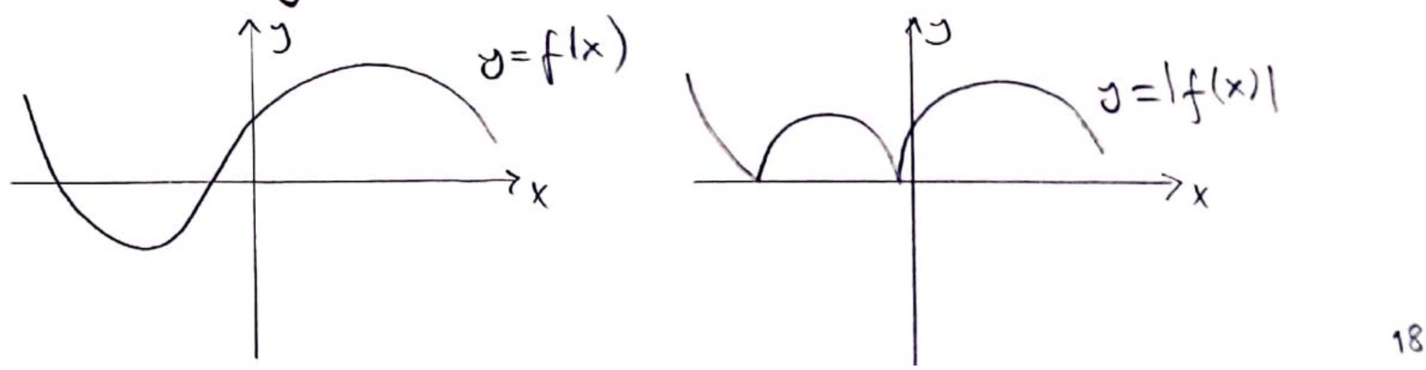
$x = 2$ icin $f(2) = 2$



Mutlak deger fonksiyonu: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$ seklinde tanimlanan fonksiyona f fonksiyonunun mutlak deger fonksiyonu denir.

Örnek: $y=|f(x)|$ in grafigi cizilirken $y=f(x)$ in grafiginde x ekseninin üstünde kalan noktalar aynen alinir, " " altinda " " in x eksenine göre simetrigi alinarak cizim tamamlanir.



İşaret fonksiyonu:

$$\operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ -1, & f(x) < 0 \end{cases}$$ şeklinde tanımlanan

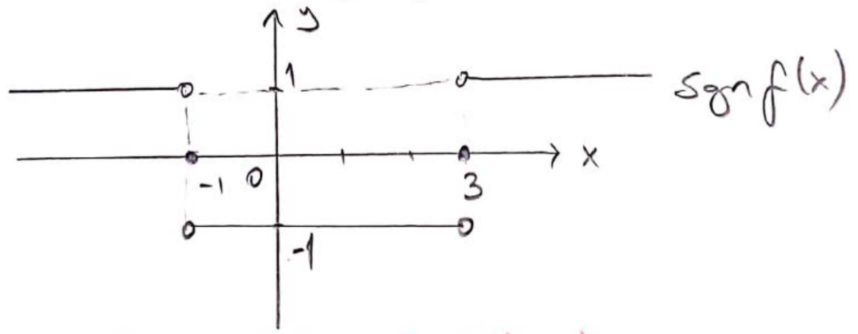
fonksiyondur.

Örnek: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ olmak üzere $\operatorname{sgn} f(x)$ in grafiğini çizelim:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = -1$

x		-1		3	
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \text{ veya } x > 3 \\ 0, & x = -1 \text{ veya } x = 3 \\ -1, & -1 < x < 3 \end{cases}$$



Fonksiyonlarla Yapılan Cebirsel işlemler

$f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon, $c \in \mathbb{R}$ sabit olsun.

$(f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x)$, $x \in D_f \cap D_g$

$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x)$, $x \in D_f \cap D_g$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in D_f \cap D_g$, $g(x) \neq 0$

$(cf)(x) = c f(x)$, $x \in D_f$.

Örnek: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$ olmak üzere $f+g$, $f \cdot g$, f/g ve $5f$ fonksiyonlarını ve tanım kümelerini bulunuz.

Öncelikle f ve g nin tanım kümelerini bulalım:

$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow x \in [-1, 1] \Rightarrow D_f = [-1, 1]$

$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

- $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{x+1}{x}$

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-1,0)\cup(0,1]$

- $(fg)(x)=f(x)g(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}(x+1)}{x}$

$D_{fg}=D_f\cap D_g=[-1,0)\cup(0,1]$

- $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{1-x^2}\,x}{x+1}$

$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g: g(x)=0\}=(-1,0)\cup(0,1]$

- $(5f)(x)=5f(x)$

$D_{5f}=D_f=[-1,1]$

Örten fonksiyon: $f:A\to B$ bir fonksiyon olsun. Her $y\in B$ için $f(x)=y$ olacak şekilde en az bir $x\in A$ var ise yani B de eşlenmemiş hiç bir eleman yok ise f e örten fonksiyon denir.

Örnek: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ fonksiyonu örten bir fonksiyondur. Gerçekten de her $y\in\mathbb{R}$ için $x=y^{1/3}\in\mathbb{R}$ olarak alınırsa $f(x)=f(y^{1/3})=(y^{1/3})^3=y$ dir.

Birebir fonksiyon: $f:A\to B$ bir fonksiyon olsun. $f(x_1)=f(x_2)$ iken $x_1=x_2$ oluyorsa f e birebir fonksiyon denir.

Bu tanıma denk olarak $x_1\neq x_2$ iken $f(x_1)\neq f(x_2)$ oluyorsa f e birebir fonksiyon denir.

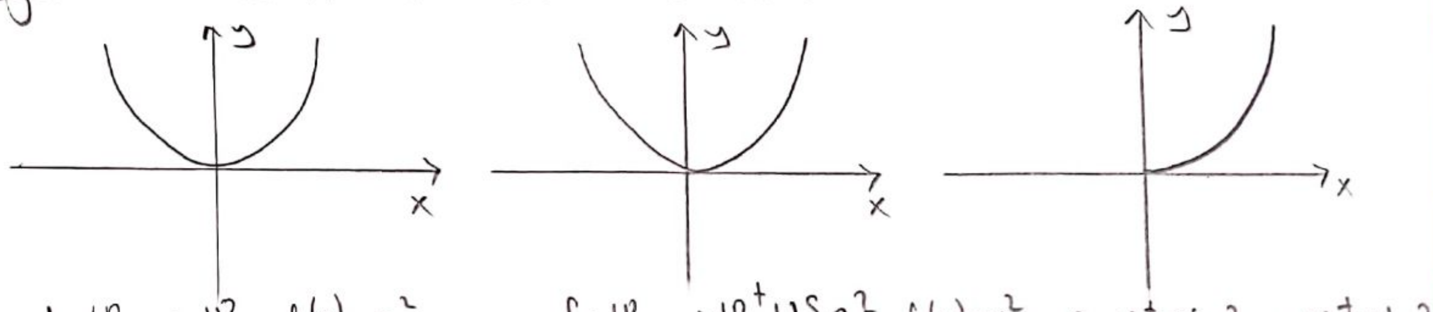
Örnek: Son örnekteki fonksiyon birebirdir. Çünkü; $x_1\neq x_2$ iken $f(x_1)=x_1^3\neq x_2^3=f(x_2)$ dir.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu birebir değildir. Çünkü $-1, 1 \in \mathbb{R}$ için $-1 \neq 1$ iken $f(-1) = f(1) = 1$ dir.

Uyarı: . Örten fonksiyonun grafiğinde x eksenine paralel doğrular grafiği en az bir noktada keser.

. Birebir fonksiyonun grafiğinde x eksenine paralel doğrular grafiği en fazla bir noktada keser.

. Örtenlik veya birebirliğe bakılırken tanım ve değer kümeleri dikkate alınır.



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
1-1 değil, örten değil

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$
örten ama 1-1 değil

$f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$f(x) = x^2$
1-1 ve örten

Bileşke fonksiyonlar: f ve g iki fonksiyon olmak üzere $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ fonksiyonuna f ile g nin bileşkesi denir.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$f \circ g$ nin tanım kümesi, $g(x)$ f in tanım kümesinde olmak üzere g nin tanım kümesindeki x lerden oluşur.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x+1$ ise aşağıdaki fonksiyonları ve tanım kümelerini bulalım:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(f \circ f)(x)$ d) $(g \circ g)(x)$

$D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$, $D_{f \circ g} = [-1, \infty)$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x}+1$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

c) $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$, $D_{f\circ f} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

d) $(g\circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+1) = x+2$, $D_{g\circ g} = \mathbb{R}$

Uyarı: Bileşke fonksiyonun formülü ile tanım kümesi belirlemek doğru değildir. Örneğin; $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ için $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ olup $f\circ g$ nin tanım kümesi $\mathbb{R}$ değildir. Çünkü $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $x \geq 0$ olmasını gerektirir. O halde $D_{f\circ g} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dır.

Bir fonksiyonun grafiğinin kaydırılması

Dikey kaydırma: $y = f(x) + k$ nın grafiğini elde etmek için

$k > 0 \Rightarrow f$ in grafiği k birim yukarı

$k < 0 \Rightarrow$ " " " " aşağı kaydırılır.

Yatay kaydırma: $y = f(x+k)$ grafiğini elde etmek için

$k > 0 \Rightarrow f$ in grafiği k birim sola,

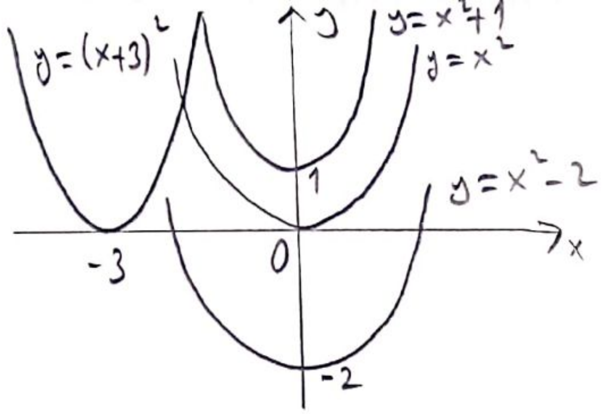
$k < 0 \Rightarrow$ " " " " sağa kaydırılır.

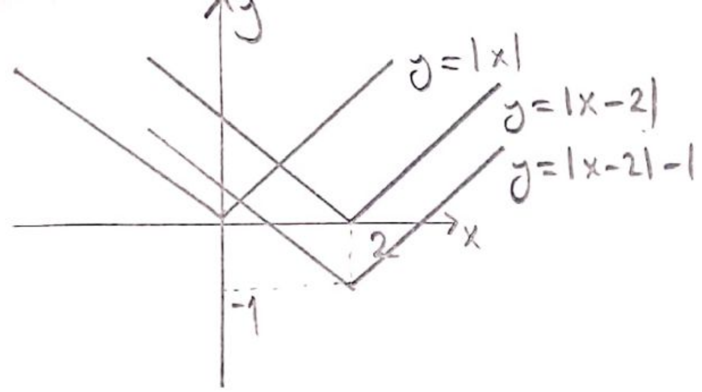
Örnek: • $y = x^2+1$ in grafiğini elde etmek için $y = x^2$ nin grafiği 1 birim yukarı kaydırılır.

• $y = x^2-2$ nin grafiğini elde etmek için $y = x^2$ nin grafiği 2 birim aşağı kaydırılır.

• $y = (x+3)^2$ nin grafiğini elde etmek için $y = x^2$ nin grafiği 3 birim sola kaydırılır.

• $y = |x-2| - 1$ in grafiğini elde etmek için $y = |x|$ in grafiği 2 birim sağa, 1 birim aşağı kaydırılır.





Dikey ve yatay ölçekleme - yansıtma

c>1 için grafik ölçeklendiğinde

· $y=cf(x)$, f'in grafiğini c çarpanı kadar dikey uzatır,

· $y=\frac{f(x)}{c}$, " " " " " sıkıştırır,

· $y=f(cx)$, " " " " yatay " ",

· $y=f\left(\frac{x}{c}\right)$, " " " " " uzatır.

27

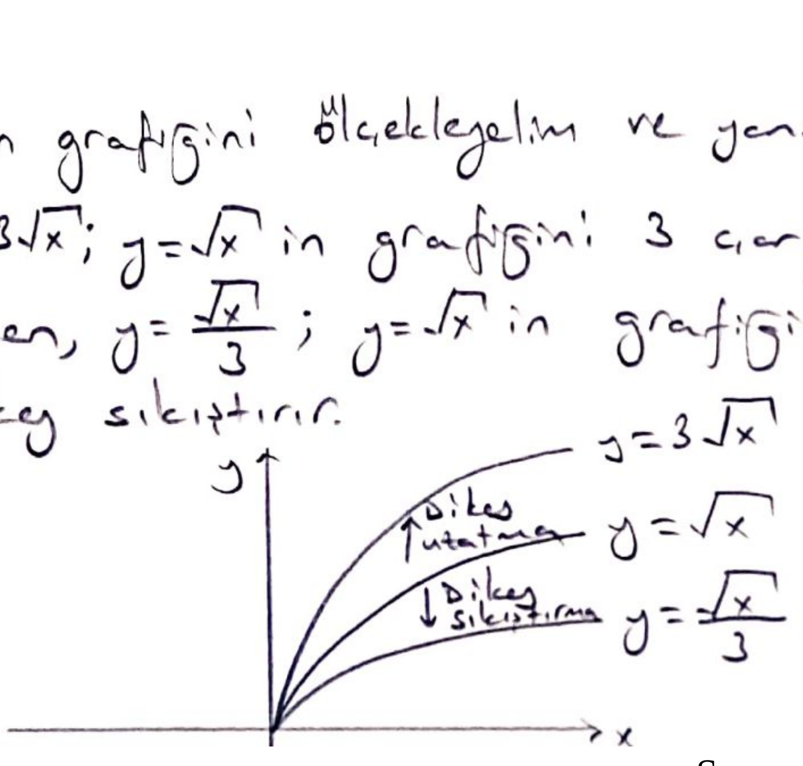
c=-1 için grafik yansıtıldığında;

· $y=-f(x)$, f'in grafiğini x ekseninin diğer tarafına yansıtır,

· $y=f(-x)$, " " y " " " " " .

Örnek: $y=\sqrt{x}$ in grafiğini ölçekleyelim ve yansıtalım:

a) Dikey: $y=3\sqrt{x}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini 3 çarpanı kadar dikey uzatırken, $y=\frac{\sqrt{x}}{3}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini 3 çarpanı kadar dikey sıkıştırır.



28